

# 基于改进 K-SVD 字典学习的超分辨率图像重构

史 郡, 王晓华

(北京理工大学信息与电子学院, 北京 100081)

**摘 要:** 针对已有算法中字典训练的时间消耗巨大的问题, 提出了一种改进的基于字典学习的超分辨率图像重构算法. 本文将 K-SVD 字典算法和高低分辨率联合生成的思想结合起来, 形成新的字典训练方法, 并将由该算法生成的高低分辨率字典应用于基于稀疏表示的超分辨率重构. 重构仿真实验证明算法不仅有效降低了字典训练所消耗的时间, 而且能够改善重构高分辨图像的质量.

**关键词:** 超分辨率重构; K-SVD; 字典学习; 联合字典训练

**中图分类号:** TP391.41      **文献标识码:** A      **文章编号:** 0372-2112(2013)05-0997-04

**电子学报 URL:** <http://www.ejournal.org.cn>

**DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2013.05.026

## Image Super-Resolution Reconstruction Based on Improved K-SVD Dictionary-Learning

SHI Jun, WANG Xiao-hua

(School of Information and Electronic, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)

**Abstract:** An improved super-resolution image reconstruction algorithm based on dictionary-learning is studied in order to solve the problem that the dictionary training process is time-consuming in the existing algorithms. The K-SVD dictionary algorithm is combined with the idea that the high and low resolution dictionaries can be co-generated. Then the high and low resolution dictionaries generated are used to the super-resolution reconstruction algorithm via sparse representation. Experiment results show that the algorithm can not only reduce the time of the dictionary training effectively, and also improve the quality of the reconstruction of high-resolution images.

**Key words:** super-resolution; K-SVD; dictionary-learning; joint dictionary training

### 1 引言

图像的超分辨率重构一直是数字图像处理的热点之一. 由于硬件和环境的限制, 高分辨成像实现困难且成本过高, 只能从软件方面利用低分辨率图像获得高分辨率图像. 目前已有的重构算法主要分为基于重构<sup>[1]</sup>和基于学习两大类. 基于重构的方法包括非均匀插值法<sup>[2]</sup>、凸集投影法<sup>[3]</sup>、迭代反投影法<sup>[4]</sup>和正则化方法<sup>[5,6]</sup>等. 目前大部分学者的研究都针对基于学习的重构算法.

在基于学习的重构算法中, 比较经典的算法是 Freeman<sup>[7,8]</sup>提出的基于例子的重构算法. 该算法最先在重构算法中利用图像块间的约束, 通过马尔可夫网络建立高低分辨率图像块间对应关系. 但是马尔可夫网络建立需要大量图像块数据, 需要耗费大量的训练时间, 而且在重构时也需要消耗非常大的搜索时间. Yang<sup>[9]</sup>把稀疏表示的思想引入到超分辨率算法中, 利用高低分辨率图像块间在特定的稀疏基下有相同的稀疏表示作为约

束条件. Yang 的算法有效降低了重构过程中消耗的时间, 并且提高了重构高分辨率图像质量. 但 Yang 未对过完备字典的生成进行优化处理, 所以过完备字典的生成仍然需要消耗大量时间.

本文借鉴 K-SVD 算法<sup>[10]</sup>和 Yang<sup>[9]</sup>提出的字典联合生成的思想, 提出了一种适合超分辨率重构的过完备字典生成方法, 有效降低了字典训练时间, 同时进一步提升了重构高分辨率图像的质量.

### 2 基于稀疏表示的超分辨率重构

在不考虑噪声的前提下, 一般认为, 低分辨率图像  $I_L$  是由高分辨率图像  $I_H$  经过模糊和降采样之后得到的, 二者的关系可表示为

$$I_L = SHI_H, \quad (1)$$

其中,  $H$  代表模糊处理,  $S$  代表降采样处理.

设  $x \in R^n$  为由高分辨率图像  $I_H$  得到一定尺寸图像块的向量表示, 存在由一组高分辨率图像样本训练得到

的元素数为  $K$  的过完备词典  $D_H (K > n)$ , 由文献[9]知, 对于过完备字典  $D_H$ , 存在唯一的最稀疏表示  $\alpha$  与图形块  $x$  相对应, 如式(2)所示.

$$\min \|\alpha\|_0, \text{ s.t. } x = D_H \alpha \quad (2)$$

式(1)的存在使得高分辨率图像  $I_H$  获得的图形块  $x$  和低分辨率图像  $I_L$  获得的图形块  $y$  必然存在对应关系. 又由于在高分辨率字典  $D_H$  下, 最稀疏表示  $\alpha$  与图像块  $x$  相对应, 则

$$y = Lx = LD_H \alpha \quad (3)$$

其中为  $L$  映射矩阵. 由此生成的低分辨率过完备字典  $D_L = LD_H$ . 即高低分辨率图像块在对应过完备字典下具有相同最稀疏表示. 在此约束下, 首先求出在低分辨率字典  $D_L$  下与低分辨率图形块  $y$  对应的最稀疏表示  $\alpha$ . 又结合高分辨率词典  $D_H$ , 利用  $x = D_H \alpha$  关系恢复出高分辨率图像块  $x$ .

式(2)的最稀疏表示是难以得到的, 所以需要近似处理. 另一方面, 为了提高重构图像质量, 需要对原始图像作特征提取后再分块. 最终转化为如下式优化问题(拉格朗日形式)

$$\min_{\alpha} \|D_H \alpha - Fy\|_2^2 + \lambda \|\alpha\|_1 \quad (4)$$

其中  $F$  表示特征提取操作. 低分辨率字典训练所需的样本也都是经过特征提取的图像样本.

由于求解稀疏表示时并没有考虑高分辨率情况, 约束条件的最终需要通过高低分辨率过完备字典间的关系体现. 所以过完备字典的训练就成为利用稀疏表示进行超分辨率图像重构的重要内容.

### 3 基于 K-SVD 算法的联合字典训练

#### 3.1 字典训练经典算法: K-SVD

针对稀疏表示的过完备字典优化生成算法中, 比较经典的就是由 Aharon 等<sup>[10]</sup>提出的 K-SVD 算法. 该算法可以有效减少字典中原子的数目, 而且训练后的原子数仍可以表示初始字典的所有信息. K-SVD 算法的基本流程如下所示.

字典训练的实质是如下式所示的优化问题.

$$\min_{D, X} \{\|Y - DX\|_F^2\}, \text{ s.t. } \forall i, \|x_i\|_0 < T_0 \quad (5)$$

其中  $Y$  表示样本集  $\{y_i\}_{i=1}^N (N \gg K)$ ,  $D$  表示过完备字典,  $X$  表示稀疏矩阵,  $T_0$  为稀疏度.

首先假设字典  $D$  确定, 优化问题式(5)就转化为寻找样本集  $Y$  的稀疏表示  $X$  的问题. Aharon 在文献[10]中使用适当的追踪算法求解稀疏分解因子.

其次, 利用获得的稀疏因子对字典的原子(字典矩阵的列)依次进行修正. 假设稀疏矩阵  $X$  和字典矩阵  $D$  已知, 若待修正的为字典矩阵的第  $k$  列, 以  $d_k$  表示  $D$  的第  $k$  列,  $x_T^k$  表示  $X$  的第  $k$  行, 则式(5)补偿项可以写

为如下形式

$$\begin{aligned} \|Y - DX\|_F^2 &= \left\| Y - \sum_{j=1}^K d_j x_T^j \right\|_F^2 = \left\| \left( Y - \sum_{j \neq k} d_j x_T^j \right) - d_k x_T^k \right\|_F^2 \\ &= \|E_k - d_k x_T^k\|_F^2 \end{aligned} \quad (6)$$

定义  $\omega_k$  记录了样本  $\{y_i\}$  中使用的原子  $d_k$  的图像块, 即令  $x_T^k(i)$  不为 0 的索引值, 则  $\omega_k = \{i | 1 \leq i \leq K, x_T^k(i) \neq 0\}$ . 在此基础上, 定义矩阵  $\Omega_k$ , 尺寸为  $N \times |\omega_k|$ , 在  $(\omega_k(i), i)$  处为 1, 其余处为 0. 令  $x_R^k = x_T^k \Omega_k$ ,  $E_k^R = E_k \Omega_k$ , 对式(6)变换, 可以得到

$$\|E_k \Omega_k - d_k x_T^k\|_F^2 = \|E_k^R - d_k x_R^k\|_F^2 \quad (7)$$

对矩阵  $E_k^R$  进行奇异值分解  $E_k^R = U \Delta V^T$ , 利用矩阵  $U$  的第一列代替字典中的原子  $d_k$ , 利用矩阵  $V$  的第一列与  $\Delta(1, 1)$  的乘积修正系数因子中的  $x_R^k$ . 为了得到理想的字典, 需要不断重复稀疏表示和修正两个步骤, 直至满足收敛条件.

#### 3.2 基于 K-SVD 算法改进的联合字典训练

K-SVD 算法其实并不完全适合超分辨率重构. 部分学者<sup>[12, 13]</sup>曾尝试将 K-SVD 算法引入到超分辨率重构中, 但效果不太理想. Yang 在文献[9]中提出了高低分辨率字典联合生成的思路, 对高低分辨率样本同时训练, 高低分辨率字典可以同时生成. 本文将这一思路与 K-SVD 算法结合起来, 由于该思路只对输入样本数据做处理, 可以保留 K-SVD 算法的基本流程.

设  $Y_H$  和  $Y_L$  分别表示高低分辨率样本,  $D_H$  和  $D_L$  分别表示高低分辨率字典. 如果高低分辨率字典分别利用 K-SVD 算法训练, 对于高分辨率训练过程, 式(5)的具体形式如下.

$$\min_{D_H, A} \{\|Y_H - D_H A\|_F^2\}, \text{ s.t. } \forall i, \|\alpha_i\|_0 < T_0 \quad (8)$$

其中  $A$  为稀疏因子矩阵. 低分辨率训练过程的对应形式如下.

$$\min_{D_L, A} \{\|Y_L - D_L A\|_F^2\}, \text{ s.t. } \forall i, \|\alpha_i\|_0 < T_0 \quad (9)$$

根据文献[9]的联合训练思想, 由于高低分辨率图像块有共同稀疏因子, 所以将式(8)和式(9)合并为如下形式.

$$\min_{D_H, D_L, A} \{\|Y - DA\|_F^2\}, \text{ s.t. } \forall i, \|\alpha_i\|_0 < T_0 \quad (10)$$

其中

$$Y = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{N}} Y_H \\ \frac{1}{\sqrt{M}} Y_L \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{N}} D_H \\ \frac{1}{\sqrt{M}} D_L \end{bmatrix} \quad (11)$$

$N$  和  $M$  分别为样本中图像块向量形式的维度. 以式(11)中的  $Y$  作为 K-SVD 算法的输入, 利用 K-SVD 算法获得字典  $D$  后, 利用式(11)中的关系获得高低分辨率

字典.

最终的算法流程如下:

输入为高低分辨率样本,限定收敛条件或迭代次数.

(1)根据式(11)生成联合样本  $Y$ ,根据  $Y$  初始化字典矩阵  $D$ .

(2)稀疏编码:利用任意的跟踪算法计算每一个样本  $y_i$  的稀疏表示向量  $\alpha_i$ ,即解决优化问题: $i = 1, 2, \dots, N, \min_{\alpha_i} \{ \| y_i - D\alpha_i \|_2 \}, \text{s.t. } \| \alpha_i \| < T_0$ .

(3)K-SVD:记录样本使用字典原子情况  $\omega_k = \{ i | 1 \leq k \leq N, \alpha_i^k(i) \neq 0 \}$ ,计算全局差错矩阵  $E_k = Y - \sum_{j \neq k} d_j \alpha_j^T$ .通过选取  $\omega_k$  对应的列约束  $E_k$  以得到  $E_k^R$ .使用奇异值分解  $E_k^R = U\Delta V^T$ .用矩阵  $U$  的第一列代替字典中的原子  $d_k$ ,利用矩阵  $V$  的第一列与  $\Delta(1,1)$  的乘积修正系数因子中的  $\alpha_k^R$ .

(4)满足收敛条件或达到迭代次数后,根据关系式(11),得到  $D_H$  和  $D_L$ .

## 4 实验结果分析

### 4.1 字典训练时间比较

由于本文针对 Yang<sup>[9]</sup>算法中字典训练效率低下进行优化,需要考察字典训练时间的花费.为了让二者具

有可比性,两种方法设置相同的字典训练参数:低分辨率图像块尺寸为  $3 \times 3$ ,放大倍数为 3,低分辨率样本的特征提取方法使用 Yang 算法中的一二阶梯度;训练样本数目为 5000,字典元素数为 1024;字典收敛条件设定为有限迭代,迭代次数为 50.

实验在 CPU 为双核 2.6GHz,内存为 2Gb 的计算机上进行. Yang 算法字典训练所花费时间为 3659 分钟(约 61 小时),而本文提出的字典训练方法为 78.1 分钟(约 1.3 小时),时间差距近 50 倍.本文的字典训练算法确实十分有效地降低了字典训练的时间消耗. Yang 在文献[9]中进行字典训练的流程与本文算法十分类似.但 Yang 采取的修正方式是在样本和稀疏系数已知的条件下,求解优化问题,但由于样本和稀疏系数的数据规模很大,对字典训练的效率就产生了很大影响.本文算法保留了 K-SVD 算法中修正环节中奇异值分解替换的方法,避免了大规模数据计算,可以有效提高字典训练的效率.

### 4.2 重构结果比较

实验将 Bicubic 插值作为基准算法,比较本文算法和文献[9]算法重构结果的优劣.基本重构参数与字典生成过程相同.实验中使用了女孩、花草等图像,重构结果见图 1~4.同时计算重构高分辨图像的均方误差(MSE)和结构相似度(SSIM)<sup>[13]</sup>,结果见表 1.

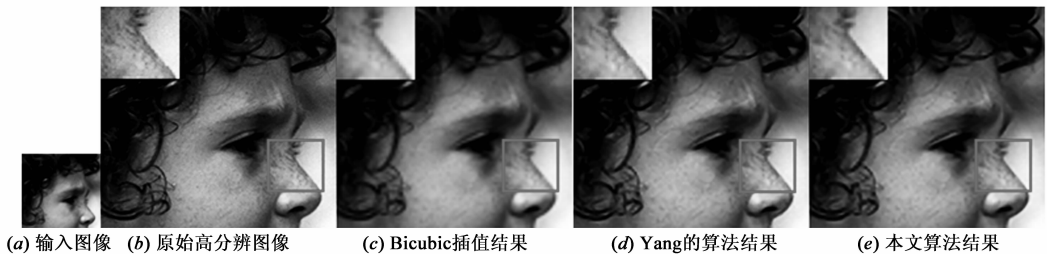


图1 各算法重构结果比较(Girl图)

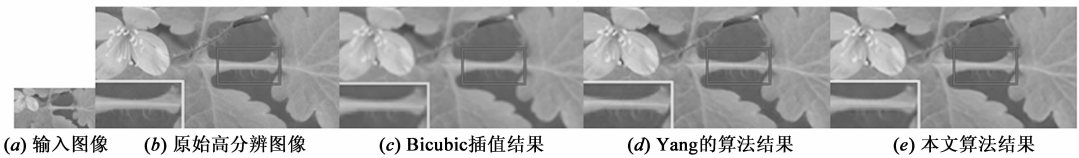


图2 各算法重构结果比较(Flower图)



图3 各算法重构结果比较(Lena图)



图4 各算法重构结果比较(Bananas图)

考察图 1~4 中细节,如女孩脸上的雀斑,花茎上的绒毛,本文算法得到的重构图像更清晰,在直观上更接近原始的高分辨率图像.图 3 中还发现本文的算法没有出现 Yang 算法中的伪轮廓现象,说明本文算法优于 Yang 的算法.

表 1 各算法重构图像的均方误差和结构相似度

图片	Bicubic 插值		Yang 的算法		本文算法	
	MSE	SSIM	MSE	SSIM	MSE	SSIM
Girl	34.9234	0.7993	32.8185	0.8134	31.6774	0.8160
Flower	12.3992	0.9177	11.3892	0.9226	10.8086	0.9261
Lena	87.1902	0.8479	78.5647	0.8505	73.7598	0.8662
Bananas	23.7140	0.9263	22.7372	0.9216	21.7918	0.9293

由表 1 可以看出,本文算法获得的重构图像有最小的均方误差和最大的结构相似度.从表 1 并结合文献 [13] 知,三种算法在图像质量的数学指标上,本文的算法是最优的.

## 5 结论

本文将 K-SVD 字典训练算法与高低分辨字典联合训练的思想结合起来,形成新的字典训练算法,该算法有效地降低了重构算法中字典训练的时间消耗,缩短时间接近 50 倍.将新算法生成的字典用于稀疏表示的图像重构,得到的重构高分辨率图像质量也得到了改善.

## 参考文献

- [1] Park S, Park M, Kang M. Super-resolution image reconstruction: a technical overview [J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2003, 20(3): 21 - 36.
- [2] Hou H S, Andrews H C. Cubic spline for image interpolation and digital filtering [J]. IEEE Transaction on Signal Pressing, 1978, 26(6): 508 - 517.
- [3] Stark H, Oskoui P. High resolution image recovery from image-plane arrays, using convex projections [J]. Opt Soc Am A, 1989, 6(11): 1715 - 1726.
- [4] Irani M, Peleg S. Improving resolution by image registration [J]. CVGIP: Graphical Models and Image Processing, 1991, 53(3): 231 - 239.

- [5] Nhat N, Milanfar P, Golub G A. A computationally efficient super resolution image reconstruction algorithm [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2001, 10(4): 573 - 583.
- [6] Hardie R C, Barnard, Armstrong K. J, et al. Joint MAP registration and high-resolution image estimation using a sequence of under-sampled images [J]. IEEE Trans Image Processing, 1997, 6(12): 1621 - 1633.
- [7] Freeman W T, Pasztor E C, Carmichael O T. Learning low-level vision [J]. International Journal of Computer Vision, 2000, 40(1): 25 - 47.
- [8] Freeman W T, Pasztor E C, Carmichael O T. Example-based super-resolution [J]. IEEE Computer Graphics and Application, 2002, 22(2): 56 - 65.
- [9] Yang J, Wright J, Huang T, et al. Image super-resolution via sparse representation [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2010, 19(11): 2861 - 2873.
- [10] Aharon M, Elad M, Bruckstein A. K-SVD: An algorithm for designing overcomplete dictionaries for sparse representation [J]. IEEE Trans. Signal Process, 2006, 54(11): 4311 - 4322.
- [11] Elad M. Sparse and Redundant Representations: From Theory to Applications in Signal and Image Processing [M]. New York: Springer, 2010: 228 - 237.
- [12] 刘志州. 基于字典学习的超分辨率图像重构 [D]. 西安电子科技大学, 2011.
- [13] Wang Z, Bovik A C, Sheikh H R, et al. Image quality assessment: from error visibility to structural similarity [J]. IEEE Transaction on Image Processing, 2004, 13(4): 600 - 612.

## 作者简介



史 郡 男, 1987 年生于甘肃天水. 北京理工大学信息与电子学院信息与通信工程专业硕士研究生. 研究方向为图像处理.  
E-mail: sjupiter@126.com

王晓华 女, 博士, 北京理工大学信息与电子学院副教授. 研究方向为图像处理.